

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич,
В. Л. Тимохович

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ТЕОРИЯ, ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ

В 2 частях
Часть 2

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования

М о з ы р ь
«Белый Ветер»
2 0 1 5

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

УДК 514(075.3)
ББК 22.151.ОЯ 721
А61

Рецензенты:

доктор педагогических наук, проректор по учебной работе УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» **В. В. Шлыков**;
учитель математики высшей категории ГУО «Гимназия № 41 г. Минск имени Серебряного В. Х.» **Л. И. Лавринович**

Амелькин, В. В.

А61 Геометрия на плоскости. Теория, задачи, решения : в 2 ч. Ч. 2 : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич, В. Л. Тимохович. — Мозырь : Белый Ветер, 2015. — 304 с. : ил.
ISBN 978-985-574-527-4 (ч. 2).
ISBN 978-985-574-528-1.

Пособие отличается от известных книг по школьной геометрии как широтой охвата материала (это практически все разделы геометрии на плоскости), так полнотой и глубиной его изложения. Тщательно отобранный и систематизированный теоретический материал, а также большое количество задач различного уровня сложности с решениями не только помогут учащимся углубить свои знания, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении планиметрии, но и предоставляют хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к выпускным и вступительным экзаменам по математике.

Предназначено учащимся, абитуриентам, преподавателям и будет полезно всем, кто интересуется элементарной математикой.

УДК 514(075.3)
ББК 22.151.я721

Учебное издание

АМЕЛЬКИН Владимир Васильевич
РАБЦЕВИЧ Владимир Леонидович
ТИМХОВИЧ Владимир Леонидович

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Теория, задачи, решения

В 2 частях. Часть 2

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования

Главный редактор *С. Е. Шумак*. Художественный редактор *Я. В. Кожухова*
Ведущий редактор *Н. Н. Хлебина*. Художник *Е. Н. Рогова*. Художник обложки *Е. Н. Рогова*
Компьютерная верстка *Н. Н. Хлебиной*

Подписано в печать с оригинал-макета 27.07.2015. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 17,67. Уч.-изд. л. 13,55. Тираж 2013 экз. Заказ 459/5745274-1.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Общество с ограниченной ответственностью «Издательский Дом «Белый Ветер». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/35 от 16.01.2015. 247760, г. Мозырь, ул. Советская, 198/4. Тел./факс (0236) 32-51-03, 32-51-22. Филиал: 220007, г. Минск, ул. Володько, 30, оф. 417.
Тел. (017) 224-66-89, 298-50-26, 298-50-27. <http://belveter.by>. E-mail: book@belveter.by

ISBN 978-985-574-527-4 (ч. 2)
ISBN 978-985-574-528-1

© Амелькин В. В., Рабцевич В. Л., Тимохович В. Л., 2015
© Оформление. ООО ИД «Белый Ветер», 2015

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

Оглавление

<i>Предисловие</i>	6
ГЛАВА 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР	8
§ 21. Движения, виды движений. Преобразование подобия, гомотетия	8
Свойства движения	9
21.1. Симметрии	10
21.2. Поворот	12
21.3. Параллельный перенос	12
21.4. Преобразование подобия, гомотетия	13
Свойства гомотетии	14
Свойства преобразования подобия	17
Задачи	18
Задачи для самостоятельного решения	23
ГЛАВА 6. ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ	25
§ 22. Задачи на доказательство и вычисление	26
22.1. Треугольники	26
22.2. Четырехугольники	30
22.3. Окружность, круг	37
Задачи для самостоятельного решения	41
ГЛАВА 7. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ	43
§ 23. Простейшие (базовые) задачи на построение	44
§ 24. Построение треугольника по трем элементам	47
Задачи для самостоятельного решения	56

§ 25. Некоторые методы решения задач на построение	57
25.1. Метод геометрического места точек	57
25.2. Метод спрямления	61
25.3. Метод центральной симметрии	64
25.4. Метод осевой симметрии	65
25.5. Метод поворота	67
25.6. Метод параллельного переноса	69
25.7. Метод подобия	70
25.8. Метод гомотетии	73
25.9. Алгебраический метод	76
Задачи для самостоятельного решения	80
ГЛАВА 8. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	81
§ 26. Треугольники и окружности	81
§ 27. Многоугольники и окружности	91
ГЛАВА 9. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГРУППЫ С	95
§ 1. Углы, треугольники	95
§ 2. Равенство и подобие треугольников	98
§ 3. Пропорциональные отрезки	102
§ 4. Окружность, круг, дуга, хорда, диаметр. Углы	104
§ 5. Окружность. Касательная, касательные и хорды, касательные и секущие	107
§ 6. Медианы	110
§ 7. Высоты	115
§ 8. Биссектрисы	127
§ 9. Треугольник. Вписанные, описанные и невписанные окружности	135
§ 10. Теорема синусов	142
§ 11. Теорема косинусов	146
§ 12. Решение треугольников	151
§ 13. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	154

§ 14. Трапеция	162
§ 15. Вписанные и описанные четырехугольники	166
§ 16. n -угольники (многоугольники), произвольные четырехугольники	172
§ 17. Площадь n -угольников	176
§ 18. Площадь круга и его частей	180
§ 19. Отношение площадей	182
§ 20. Векторы на плоскости	189
§ 21. Движения, виды движений. Преобразование подобия, гомотетия	198
§ 22. Задачи на доказательство и вычисление	202
§ 24. Построение треугольника по трем элементам	213
§ 25. Некоторые методы решения задач на построение	220
§ 26. Треугольники и окружности	228
§ 27. Многоугольники и окружности	284
<i>Предметный указатель</i>	302
<i>Литература</i>	303

Предисловие

Книга написана с учетом многолетнего опыта работы авторов с самыми различными по уровню подготовки аудиториями учащихся и абитуриентов.

Пособие отличается от известных книг по школьной геометрии как шириной охвата материала (это практически все разделы геометрии на плоскости (планиметрии)), так и полнотой и глубиной его изложения.

Тщательно отобранный и систематизированный теоретический материал, а также большое количество задач различного уровня сложности с решениями (значительное число задач в книге — это задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике в ведущих вузах Российской Федерации и Республики Беларусь) не только помогут учащимся углубить свои знания, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении планиметрии, но и предоставят хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к выпускным и вступительным экзаменам по математике в ее геометрической части — геометрии на плоскости.

Теперь о некоторых соглашениях. В пособии многие свойства геометрических фигур нумеруются с буквой X (например, свойство 1.4X). Это означает, что такие свойства являются характеристическими, т. е. кроме сформулированного утверждения, имеет место и утверждение, обратное приведенному. Обратные утверждения читателю полезно доказать самому (доказательства некоторых из них в пособии приводятся).

Определенное число задач нумеруются (кроме обычной нумерации) с символом ▼ (например, ▼21.8). Последнее означает, что каждая из таких задач либо дополняет тот или иной список свойств геометрических фигур, либо иллюстрирует часто встречающийся прием или метод решения, поэтому авторы рекомендуют читателям обратить на них особое внимание.

Еще одна группа задач — это задачи для самостоятельного решения. Они нумеруются в пособии с буквой С (например, 21.1С). Решения всех

задач данной группы приводятся в главе 9, к которой читатели могут обратиться в случае затруднений с решением или для контроля.

Что же касается рекомендаций по приобретению прочных навыков решения геометрических (и не только) задач, то, хотя это и не звучит оригинально, совет один: задач надо решать как можно больше. Начинать же их решение следует с выполнения хорошего чертежа, как можно более точно отражающего те или иные зависимости между параметрами (например, длинами, углами, площадями), фигурирующими в условиях задач.

Пособие предназначено учащимся и преподавателям средних школ и гимназий, лицеев и колледжей, а также абитуриентам.

Но, как надеются авторы, и студенты, и преподаватели педагогических специальностей высших учебных заведений также найдут в книге интересный материал, который они смогут использовать в своей работе.

Авторы благодарны рецензентам Л. И. Лавриновичу и В. В. Шлыкову за конструктивные замечания и рекомендации по улучшению пособия, К. С. Филиповичу за творческие консультации, В. В. Крахотко за содержательные обсуждения.

ГЛАВА 5

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР

Напомним, что *фигурой на плоскости* называется произвольное множество точек этой плоскости.

В частности, сама плоскость является фигурой.

Преобразованием φ фигуры Φ в фигуру Φ_1 называется правило, позволяющее каждой точке фигуры Φ поставить в соответствие некоторую точку фигуры Φ_1 . Если при этом для каждой точки B фигуры Φ_1 можно указать единственную точку A фигуры Φ , которая при преобразовании φ переходит в точку B , то говорят, что определено обратное преобразование φ^{-1} фигуры Φ_1 в фигуру Φ .

Композицией преобразований $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ фигуры M называется преобразование, являющееся результатом последовательного осуществления преобразований $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Композиция преобразований $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ обозначается $\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$.

Таким образом, если A — точка фигуры M , то, применив к точке A указанную композицию преобразований, получим точку $A^* = \varphi_n \left(\dots \varphi_2 \left(\varphi_1 (A) \right) \right)$.

§ 21. ДВИЖЕНИЯ, ВИДЫ ДВИЖЕНИЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ, ГОМОТЕТИЯ

Движением называется преобразование одной фигуры в другую, при котором сохраняются расстояния между точками, другими словами, движение — это преобразование, которое точкам A и B фигуры Φ ставит в соответствие такие точки A_1 и B_1 фигуры Φ_1 , что $A_1 B_1 = AB$.

Заметим, что преобразование, обратное для движения, также является движением.

Свойства движения

Свойство 21.1. При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, причем порядок взаимного расположения точек на прямой сохраняется.

Доказательство. Пусть точки A , B и C принадлежат прямой l , причем точка B лежит между точками A и C , т. е. $AB + BC = AC$ (рис. 21.1). Далее, пусть точки A_1 , B_1 и C_1 — точки, в которые при движении переходят соответственно точки A , B и C .

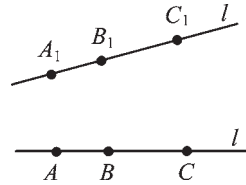


Рис. 21.1

Тогда по определению движения $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $A_1C_1 = AC$. Но в таком случае, складывая почленно первые два равенства, имеем $A_1B_1 + B_1C_1 = AB + BC = AC$.

Далее, так как $A_1B_1 + B_1C_1 = AC$, а по условию $AC = A_1C_1$, приходим к выводу, что $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$, т. е. действительно, точки A , B и C прямой l переходят соответственно в точки A_1 , B_1 и C_1 некоторой прямой l_1 , где точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1 .

Следствие 21.1. При движении прямые переходят в прямые, лучи — в лучи, отрезок заданной длины — в отрезок той же длины.

Свойство 21.2. При движении окружность переходит в окружность того же радиуса.

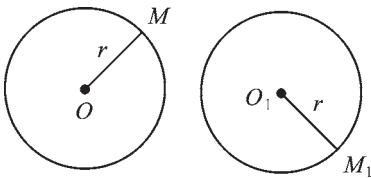


Рис. 21.2

Доказательство. При некотором движении центр O окружности радиуса r перейдет в некоторую точку O_1 , а произвольная точка M окружности перейдет в точку M_1 такую, что $O_1M_1 = OM = r$ (рис. 21.2).

Поэтому при выбранном движении окружность с центром O и радиусом r перейдет в окружность с центром O_1 и радиусом r , т. е. в окружность того же радиуса.

Свойство 21.3. При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

Предметный указатель

Г

Геометрическое место точек 57
Гомотетия 13

Д

Движение 8
Дельтоид 168

К

Композиция преобразований 8
Коэффициент подобия 13

П

Параллельный перенос на вектор 12
Поворот около точки 12
Построение
— среднего геометрического 76
— четвертого пропорционального 76
Преобразование
— обратное 8
— подобия 13
— фигур 8
Прямая Симпсона 92

С

Симедиана 86
Симметрия
— осевая 11
— относительно прямой 11
— относительно точки 10
— центральная 10
Спрявление 61

Т

Точка Микеля 92
Точки критические 25
Точки, симметричные
относительно
— прямой 11
— точки 10

Ф

Фигура на плоскости 8
Фигуры подобные 13

Литература

1. *Болтянский, В. Г.* Преобразования. Векторы / В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. М. : Просвещение, 1964. 304 с.
2. *Ваховский, Е. Б.* Задачи по элементарной математике / Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. М. : Наука, 1971. 360 с.
3. *Готман, Э. Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения / Э. Г. Готман. М. : Просвещение : АО «Учеб. лит.», 1996. 240 с.
4. *Жук, И. К.* Решения экзаменационных задач по математике за курс базовой школы. В 3 ч. Ч. 3 / И. К. Жук, С. К. Жук. Мн. : Жасскон, 2001. 340 с.
5. Задачи по элементарной математике / В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин. М. : Наука, 1969. 416 с.
6. *Кузьмин, Ю. Н.* Математика / Ю. Н. Кузьмин. СПб. : Спец. литература, 1995. 128 с.
7. *Кушнир, И. А.* Векторные методы решения задач / И. А. Кушнир. Киев : Обериг, 1994. 207 с.
8. *Куценко, В. С.* Сборник конкурсных задач по математике с решениями / В. С. Куценко. Л. : Судпромгиз, 1960. 374 с.
9. *Лурье, М. В.* Пособие по геометрии / М. В. Лурье, Б. И. Александров. М. : Изд-во МГУ, 1984. 256 с.
10. *Прасолов, В. В.* Задачи по планиметрии. В 2 ч. Ч. 1 / В. В. Прасолов. М.: Наука, 1986. 272 с.
11. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы / П. Т. Дыбов, А. И. Забоев, А. С. Иванов и др. ; под ред. А. И. Прилепко. М. : Высш. шк., 1989. 271 с.
12. Сборник конкурсных задач по математике / В. М. Говоров, П. Т. Дыбов, Н. В. Мирошин, С. Ф. Смирнова ; под ред. А. И. Прилепко. М. : Наука, 1983. 384 с.

13. *Ткачук, В. В.* Математика — абитуриенту / В. В. Ткачук. 5-е изд., испр. и доп. М. : МЦНМО, 1998. 864 с.

14. *Цырульникова, М. Г.* Конкурсные задачи по геометрии с решениями из сборника под редакцией М. И. Сканави / М. Г. Цырульникова, Х. А. Ильягуев, В. Ф. Антонов. М. : БАО-Пресс, 1999. 656 с.

15. *Шарыгин, И. Ф.* Геометрия. 9—11 кл.: От учебной задачи к творческой / И. Ф. Шарыгин. М. : Дрофа, 1997. 400 с.

16. *Шарыгин, И. Ф.* Избранные задачи по геометрии конкурсных экзаменов в ВУЗы (1987—1990) / И. Ф. Шарыгин. Львов : «Квантор», 1991. 97 с.

17. *Шахно, К. У.* Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности / К. У. Шахно. 4-е изд., стереотип. Мн. : Выш.шк., 1967. 478 с.

18. *Шлыков В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Шлыков. 2-е изд. Мн. : Асар, 2000. 288 с.