

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

ГОТОВИМСЯ К ОЛИМПИАДАМ

ПО МАТЕМАТИКЕ

10–11
классы

В 2 частях. ЧАСТЬ 1

Пособие для учителей
учреждений общего среднего образования

*Рекомендовано Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования» Министерства образования
Республики Беларусь*

М о з ы р ь
«Выснова»
2 0 1 8

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

УДК 372.851(035.3)
ББК 74.262.21+74.58
Г74

С о с т а в и т е л ь **Е. П. ГРИНЬКО**

Рецензенты:

кафедра математики и информатики учреждения образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова» (кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры **Б. Д. Чеботаревский**);
учитель математики высшей квалификационной категории государственного учреждения образования «Средняя школа № 143 г. Минска имени М. О. Ауэзова» **Г. М. Исаченко**

Готовимся к олимпиадам по математике. 10—11 классы :
Г74 в 2 ч. Ч. 1 : пособие для учителей учреждений общего среднего образования / [сост. Е. П. Гринько]. — Мозырь : Выснова, 2018. — 131, [1] с. : ил.

ISBN 978-985-592-404-4 (часть 1).

ISBN 978-985-592-406-8.

В пособии рассмотрены некоторые методы решения школьных олимпиадных задач по математике (арифметика, теория чисел, теория графов, комбинаторика, алгебра, геометрия). Издание содержит теоретический материал, большой объем олимпиадных задач с решениями, задания Международной белорусско-литовско-украинско-польской математической олимпиады и задания для самостоятельной работы.

Адресовано учителям математики учреждений общего среднего образования, студентам педагогических специальностей университетов, учащимся старших классов, интересующимся математикой.

УДК 372.851(035.3)
ББК 74.262.21+74.58

Учебное издание

ГОТОВИМСЯ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

10—11 классы

В 2 частях. Часть 1

Пособие для учителей учреждений общего среднего образования

С о с т а в и т е л ь **ГРИНЬКО** Елена Петровна

Ответственный за выпуск *А. В. Денисова*

Подписано в печать с оригинал-макета 03.11.2017. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 6,05. Тираж 1600 экз. Заказ 388/5924044-1.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Общество с ограниченной ответственностью «Издательство «Выснова». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/517 от 05.05.2017. Ул. Советская, д. 198-100, 247777, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь. Тел./факс (0236) 23-70-25. Филиал № 1 ООО «Издательство «Выснова»: ул. Володько, д. 30, пом. 417, 220007, г. Минск, Республика Беларусь. Тел. (017) 380-41-53, 224-66-89. vysnova.by. E-mail: book@vysnova.by

ISBN 978-985-592-404-4 (часть 1)
ISBN 978-985-592-406-8

© ООО «Издательство «Выснова», 2018



Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Республике Беларусь проводятся различные математические олимпиады и конкурсы. Особый интерес учащихся вызывает республиканская олимпиада, которая в течение учебного года имеет несколько этапов.

1-й этап — школьная олимпиада. Эта олимпиада проводится по текстам, составленным учителями математики, и в ней принимают участие все желающие учащиеся 5—11 классов.

Анализ содержания заданий школьных олимпиад выявляет общие принципы формирования комплектов заданий по математике для школьной олимпиады:

- нарастание сложности заданий от первого к последнему;
- задания составляются на основе программы по математике для общеобразовательных учебных учреждений;
- в комплект входят задачи по геометрии, алгебре, комбинаторике (в младших классах — по арифметике, логические задачи; в старших классах — по теории чисел, тригонометрии, планиметрии и стереометрии, математическому анализу); присутствуют и задачи, объединяющие различные разделы школьной математики; в качестве самых сложных задач выступают задачи, решение которых базируется на материале, изучаемом на факультативных занятиях;
- задачи нестандартны, обладают определенной степенью новизны для участников олимпиады.

Для успешного участия в олимпиадах необходимо выполнение следующих условий:

- систематическое проведение внеклассной работы по предмету;
- обеспечение регулярности проведения всех этапов олимпиад;
- серьезная подготовительная работа перед проведением каждого этапа олимпиад;
- хорошая организация проведения олимпиад;
- интересное предметное содержание соревнований.

Темы, которые чаще других используют при составлении комплектов заданий школьных олимпиад [13]:

5 класс — Числовые ребусы. Задачи на разрезание, переливания, взвешивания. Логические или текстовые задачи.

6 класс — Числовые ребусы. Свойства геометрических фигур. Логические или текстовые задачи. Четность, нечетность.

7 класс — Числовые ребусы. Задачи на составление уравнения. Делимость натуральных чисел. Задачи на переливания, взвешивания. Логические задачи. Свойства геометрических фигур.

8 класс — Преобразование алгебраических выражений. Построение графиков функций. Основные элементы треугольника. Делимость натуральных чисел. Логические задачи.

9 класс — Делимость. Квадратный трехчлен и его свойства. Преобразования алгебраических выражений. Основные элементы треугольника. Логические задачи.

10 класс — Квадратный трехчлен и его свойства. Прогрессии. Площадь. Подобие фигур. Неравенства. Логические (комбинаторные) задачи.

11 класс — Системы уравнений. Окружность. Свойства вписанных углов. Тригонометрические уравнения. Построение графиков функций. Комбинаторные задачи.

2-й этап — районная (городская) олимпиада. Эта олимпиада проводится по текстам, составленным областным оргкомитетом (методистами ИРО, преподавателями вузов). В ней принимают участие учащиеся 8—11 классов — победители 1-го этапа. Часто предлагаются задачи по следующей тематике:

8 класс — Задачи на проценты. Четность. Фигуры (площадь, разрезания). Логические задачи. Делимость натуральных чисел. Признаки делимости. Признаки равенства треугольников. Преобразование алгебраических выражений.

9 класс — Координатная плоскость. Неравенства. Задачи на составление уравнений или систем уравнений. Подобие фигур. Комбинаторные задачи.

10 класс — Неравенства. Свойства квадратичной функции. Окружность. Вписанные многоугольники. Делимость и остатки. Комбинаторные задачи.

11 класс — Свойства квадратичной функции. Прогрессии. Подобие фигур. Системы уравнений. Делимость и остатки. Комбинаторные задачи.

3-й этап — областная олимпиада. Тексты задач составляются республиканским оргкомитетом. В ней принимают участие учащиеся 8—11 классов — победители 2-го этапа.

4-й этап, заключительный — республиканская олимпиада. Тексты заданий составляются членами жюри республиканского оргкомитета. Все задачи являются авторскими. В республиканской олимпиаде принимают участие учащиеся 8—11 классов — победители 3-го этапа олимпиады.

Темы, на которые следует обратить внимание при подготовке к 3-му и заключительному этапам белорусской математической олимпиады, следующие:

8 класс — Нестандартные текстовые задачи. Суммы и средние. Принцип Дирихле. Делимость. Индукция. Игры. Графы. Лингвистика. Периодичность. Комбинаторика. Парадоксы и софизмы. Преобразование алгебраических выражений. Уравнения. Уравнения с целой и дробной частью. Уравнения в целых числах. Геометрические фигуры.

9 класс — Логические задачи. Принцип Дирихле. Метод перебора. Правило крайнего. Углы. Треугольники. Задачи на построение. Треугольники и окружности. Делимость чисел. Простые и составные числа. НОК

и НОД чисел. Замечательные точки и линии в треугольниках. Неравенство треугольника. Преобразование числовых и алгебраических выражений. Тождества. Математические ребусы. Взвешивания. Диофантовы уравнения первого порядка. Рациональные уравнения и неравенства. Работа с остатками. Игровые задачи. Симметрия. Выигрышные позиции. Анализ с конца — метод поиска выигрышных позиций. Углы, опирающиеся на дуги. Четырехугольники. Метод инвариант. Задачи на раскраску. Геометрическое место точек. Теорема Пифагора. Графы. Задачи на конструирование. Задачи на разрезание. Преобразование числовых и алгебраических выражений. Вычисление простейшим способом. Комбинаторика. Прогрессии. Сумма последовательности чисел. Метод математической индукции. Подобие фигур. Метод подобия в задачах на построение. Решение уравнений в целых числах. Уравнения с прогрессией. Алгебраический метод решения задач на построение. Числа с заданными свойствами. Натуральные числа. Перпендикуляр и наклонные. Уравнения и неравенства с абсолютной величиной. Системы уравнений. Уравнения и системы уравнений с параметрами. Условные равенства и неравенства. Последовательности. Функции. Построение графиков функций.

10 класс — Метод математической индукции. Задачи комбинаторно-логического характера. Доказательство тождеств, неравенств. Принцип наименьшего элемента. Индукция в геометрии. Основы теории чисел: Простые числа. Алгоритм Евклида. Основная теорема арифметики. Линейные диофантовы уравнения. Системы линейных диофантовых уравнений. Простейшие диофантовы уравнения второй степени. Пифагоровы тройки. Элементы теории сравнений. Малая теорема Ферма, теорема Эйлера, теорема Вильсона. Методы решения олимпиадных задач: Принцип Дирихле. Правило крайнего. Инварианты. Четность, нечетность. Игры, турниры, стратегии и алгоритмы. Задачи на раскраски, укладки, замощения. Элементы теории множеств: Язык теории множеств. Операции над множествами. Отображения множеств. Конечные множества. Формула включения-исключения. Элементы перечислительной комбинаторики: Основные комбинаторные принципы. Перестановки, размещения, сочетания, сочетания с повторениями. Бином Ньютона. Многочлены: Делимость многочленов. Корни многочленов. Теорема Безу. Теорема Виета для многочленов произвольных степеней. Основная теорема арифметики многочленов. Основная теорема алгебры. Геометрия: Теорема Менелая. Теорема Чевы. Теорема Дезарга. Теорема Фейербаха. Теорема Птолемея. Теорема Паскаля. Теорема Паппа. Теорема Морлея. Теорема Штейнера-Лемуса. Теорема Польке-Шварца. Аналитические методы в геометрии: Метод координат. Векторы и их применения. Геометрия масс. Неравенства: Классические неравенства о средних. Неравенство Коши-Буняковского. Геометрические неравенства. Графы. Синтетические методы в геометрии: Геометрия преобразований; движения. Теорема Шаля. Преобразования

подобия. Гомотетия. Композиции преобразований. Функции: Различные свойства функций, их применения (периодичность, четность, ограниченность). Функциональные уравнения. Последовательности и пределы.

11 класс — Теория чисел: Простые числа Ферма. Китайская теорема об остатках. Мультипликативные функции теории чисел. Квадратичные вычеты. Диофантовы уравнения высших степеней. Уравнения типа Каталана. Многочлены: Многочлены с действительными, целыми, рациональными коэффициентами. Неприводимые многочлены. Признаки неприводимости многочленов. Многочлены нескольких переменных. Симметрические многочлены. Неравенства: Неравенства Бернулли, Йенсена, Гельдера. Неравенство Чебышева. Теория Мюрхеда. Последовательности: Рекуррентные последовательности. Возвратные последовательности. Пределы последовательностей. Ряды. Графы: Классические теоремы теории графов. Теория Дилворта. Теория Рамсея. Множества: Разбиения множеств. Отношения множеств. Конечные, бесконечные множества. Комплексные числа: Алгебраическая и тригонометрическая формы. Формула Муавра. Решение алгебраических задач с применением комплексных чисел. Основная теорема алгебры. Геометрия: Теорема Менелая. Теорема Чевы. Теорема Дезарга. Теорема Фейербаха. Теорема Птолея. Теорема Паскаля. Теорема Паппа. Теорема Морлея. Теорема Штейнера-Лемуса. Теорема Польке-Шварца. Планиметрия: Инверсия. Комплексные числа в геометрии. Аффинные и проективные преобразования. Комбинаторная геометрия. Аналитические методы в стереометрии. Функции. Функциональные уравнения.

Наиболее частое распределение олимпиадных заданий по темам:

1. Текстовые и логические задачи.
2. Задачи на преобразование числовых и алгебраических выражений.
3. Задачи теории чисел (на делимость и остатки, четность и нечетность, сравнения).
4. Уравнения, неравенства, системы.
5. Тригонометрия.
6. Многочлены.
7. Последовательности.
8. Числовые множества.
9. Функции и их графики.
10. Комбинаторика.
11. Планиметрия.
12. Стереометрия.
13. Координаты и векторы.
14. Расстановки.
15. Турниры.
16. Графы.
17. Игры, стратегии и алгоритмы.

18. Операции и инварианты.

19. Принцип Дирихле.

20. Комбинаторная геометрия.

Успешное выступление на олимпиаде предполагает: наличие способностей в области математики; психологическую подготовку учащегося к выполнению нестандартных заданий; математическую грамотность участника, умение оформить решение задачи; желание много работать с дополнительными источниками информации.

Одним из способов подготовки учащихся к олимпиадам является дифференциация домашнего задания (включение в домашнее задание задач, требующих нестандартного мышления). Целенаправленная подготовка к олимпиадам осуществляется на внеклассных занятиях (факультативах, кружках, стимулирующих занятиях и т. п.). Учащимся рекомендуется изучать дополнительную литературу по теории, вести поиск задач, решать их самостоятельно. Хорошо зарекомендовало себя при подготовке учащихся к олимпиадам тьюторство — практика индивидуального образовательного сопровождения, ориентированная на построение и реализацию персональной образовательной стратегии, учитывающей личный потенциал учащегося.

Данная книга написана по итогам многолетней работы с одаренными в области математики детьми по подготовке к олимпиадам, конкурсам, турнирам. Особое место в ней занимают теоретические сведения, выходящие за рамки школьной программы по математике.

18. *Латотин, Л. А.* Математика. 5 класс : учебник : в 2 ч. Ч. 2 / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. — Мн.: Адукацыя і выхаванне, 2013. — 192 с.
19. *Латотин, Л. А.* Математика. 6 класс : учеб. пособие для 6 класса учреждений общего среднего образования с рус. яз. обучения / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. — 4-е изд., испр. и доп. — Мн.: 2014. — 318 с.
20. *Мазаник, А. А.* Реши сам / А. А. Мазаник, С. А. Мазаник. — Мн.: Народная асвета, 1992. — 256 с.
21. Московские математические олимпиады 1993—2005 гг. / Р. М. Федоров [и др.] ; под ред. В. М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2006. — 456 с.
22. Практические занятия по алгебре и теории чисел / М. П. Лельчук [и др.]. — Мн.: Вышэйшая школа, 1986. — 302 с.
23. *Садовничий, В. А.* Задачи студенческих математических олимпиад / В. А. Садовничий, А. Л. Григорян, С. В. Конягин. — Издательство Московского университета, 1987. — 310 с.
24. Теория чисел : электр. учеб.-метод. комплекс / Е. П. Гринько [и др.]. — Брест: БрГУ, 2014. 7,8 Мб (285 с.). — Рег. № 19/2014 от 13.11.2014.
25. *Шклярский, Д. О.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
26. *Шнеперман, Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях : в 2 ч. Ч. 1. — Мн.: Вышэйшая школа, 1986. — 272 с.
27. *Шнеперман, Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях : в 2 ч. Ч. 2. — Мн.: Вышэйшая школа, 1987. — 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Предисловие | 3 |
| НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ (ЛОГИЧЕСКИХ) ЗАДАЧ | 8 |
| ВАЖНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ | 34 |
| КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА | 112 |
| ГРАФЫ | 119 |
| Литература | 131 |