

В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич,
В. Л. Тимохович

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ТЕОРИЯ, ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ

В 2 частях **1**
Часть

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования

М о з ы р ь
«Белый Ветер»
2 0 1 5

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

Купить в России: <http://mlbv.ru>

УДК 514(075.3)
ББК 22.151.ОЯ 721
А61

Рецензенты:

доктор педагогических наук, проректор по учебной работе УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» **В. В. Шлыков**;
учитель математики высшей категории ГУО «Гимназия № 41 г. Минск имени Серебряного В. Х.» **Л. И. Лавринович**

Амелькин, В. В.

А61 Геометрия на плоскости. Теория, задачи, решения : в 2 ч. Ч. 1 : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич, В. Л. Тимохович. — Мозырь : Белый Ветер, 2015. — 288 с. : ил.

ISBN 978-985-574-526-7 (ч. 1).

ISBN 978-985-574-528-1.

Пособие отличается от известных книг по школьной геометрии как широтой охвата материала (это практически все разделы геометрии на плоскости), так полнотой и глубиной его изложения. Тщательно отобранный и систематизированный теоретический материал, а также большое количество задач различного уровня сложности с решениями не только помогут учащимся углубить свои знания, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении планиметрии, но и предоставляют хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к выпускным и вступительным экзаменам по математике.

Предназначено учащимся, абитуриентам, преподавателям и будет полезно всем, кто интересуется элементарной математикой.

УДК 514(075.3)
ББК 22.151.я721

Учебное издание

АМЕЛЬКИН Владимир Васильевич
РАБЦЕВИЧ Владимир Леонидович
ТИМОХОВИЧ Владимир Леонидович

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Теория, задачи, решения

В 2 частях. Часть 1

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования

Главный редактор *С. Е. Шумак*. Художественный редактор *Я. В. Кожухова*
Ведущий редактор *Н. Н. Хлебина*. Художник *Е. Н. Рогова*. Художник обложки *Е. Н. Рогова*
Компьютерная верстка *Н. Н. Хлебвиной*

Подписано в печать с оригинал-макета 27.07.2015. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 16,74. Уч.-изд. л. 13,55. Тираж 2013 экз. Заказ 458/5745267-1.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Общество с ограниченной ответственностью «Издательский Дом «Белый Ветер». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/35 от 16.01.2015. 247760, г. Мозырь, ул. Советская, 198/4. Тел./факс (0236) 32-51-03, 32-51-22. Филиал: 220007, г. Минск, ул. Володько, 30, оф. 417. Тел. (017) 224-66-89, 298-50-26, 298-50-27. <http://belveter.by>. E-mail: book@belveter.by

ISBN 978-985-574-526-7 (ч. 1)
ISBN 978-985-574-528-1

© Амелькин В. В., Рабцевич В. Л., Тимохович В. Л., 2015
© Оформление. ООО ИД «Белый Ветер», 2015

Купить в Беларуси: <http://belveter.by>

Купить в России: <http://mlbv.ru>

Оглавление

<i>Предисловие</i>	7
ГЛАВА 1. ТРЕУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТИ	9
§ 1. Углы, треугольники	9
1.1. Свойства углов и параллельных прямых	15
1.2. Свойства произвольного треугольника	18
1.3. Свойства равнобедренного треугольника	23
1.4. Свойства прямоугольного треугольника	24
Задачи	25
Задачи для самостоятельного решения	30
§ 2. Равенство и подобие треугольников	31
2.1. Признаки равенства произвольных треугольников	31
2.2. Признаки равенства прямоугольных треугольников	33
2.3. Признаки подобия произвольных треугольников	35
2.4. Признаки подобия прямоугольных треугольников	37
Задачи	38
Задачи для самостоятельного решения	44
§ 3. Пропорциональные отрезки	45
3.1. Свойства параллельных прямых, пересекающих стороны углов	45
3.2. Пропорциональные отрезки в произвольном треугольнике	47
3.3. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике	50
Задачи	52
Задачи для самостоятельного решения	58
§ 4. Окружность, круг, дуга, хорда, диаметр. Углы	59
4.1. Свойства хорд	60
4.2. Свойства углов	61

Задачи	63
Задачи для самостоятельного решения	67
§ 5. Окружность. Касательная, касательные и хорды, касательные и секущие	68
5.1. Свойства касательных	68
5.2. Свойство углов между касательной и хордой	69
5.3. Свойство касательной и секущей	70
Задачи	70
Задачи для самостоятельного решения	76
§ 6. Медианы.	77
6.1. Свойства медиан	77
Задачи	80
Задачи для самостоятельного решения	84
§ 7. Высоты.	85
7.1. Свойства высот	85
Задачи	89
Задачи для самостоятельного решения	101
§ 8. Биссектрисы.	103
8.1. Свойства биссектрис.	103
Задачи	108
Задачи для самостоятельного решения	116
§ 9. Треугольник. Вписанные, описанные и внеписанные окружности.	117
Задачи	118
Задачи для самостоятельного решения	125
§ 10. Теорема синусов.	126
Задачи	126
Задачи для самостоятельного решения	136
§ 11. Теорема косинусов.	137
Задачи	138
Задачи для самостоятельного решения	139
§ 12. Решение треугольников.	140
Задачи	141
Задачи для самостоятельного решения	148

ГЛАВА 2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И МНОГОУГОЛЬНИКИ	149
§ 13. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	149
13.1. Свойства параллелограмма	149
13.2. Свойства прямоугольника	151
13.3. Свойства ромба	152
13.4. Свойства квадрата	153
Задачи	153
Задачи для самостоятельного решения	162
§ 14. Трапеция	164
14.1. Свойства произвольной трапеции	164
14.2. Свойства равнобочной трапеции	168
Задачи	169
Задачи для самостоятельного решения	176
§ 15. Вписанные и описанные четырехугольники	177
15.1. Свойства вписанных и описанных четырехугольников	177
Задачи	179
Задачи для самостоятельного решения	186
§ 16. n-угольники (многоугольники), произвольные четырехугольники	187
16.1. Свойства n -угольников	189
16.2. Произвольные четырехугольники	195
Задачи	198
Задачи для самостоятельного решения	207
ГЛАВА 3. ПЛОЩАДЬ	209
§ 17. Площадь n-угольников	209
17.1. Площадь прямоугольника и параллелограмма	209
17.2. Площадь треугольника	210
17.3. Площадь трапеции, произвольного четырехугольника и описанного n -угольника	217
Задачи	221
Задачи для самостоятельного решения	228
§ 18. Площадь круга и его частей	229
18.1. Длина окружности	229
18.2. Площадь круга, сектора и сегмента	230

Задачи	233
Задачи для самостоятельного решения	237
§ 19. Отношение площадей.	237
19.1. Отношение площадей n -угольников.	237
Задачи	239
Задачи для самостоятельного решения	250
ГЛАВА 4. ВЕКТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.	252
§ 20. Векторы на плоскости.	252
20.1. Определения и обозначения, связанные с понятием вектора	252
20.2. Сложение и вычитание векторов.	254
20.3. Умножение и деление вектора на число.	256
20.4. Деление отрезка в данном отношении.	259
20.5. Проекция и координаты векторов.	260
20.6. Скалярное произведение векторов.	266
Задачи	269
Задачи для самостоятельного решения	281
<i>Предметный указатель</i>	283
<i>Литература</i>	287

Предисловие

Книга написана с учетом многолетнего опыта работы авторов с самыми различными по уровню подготовки аудиториями учащихся и абитуриентов.

Пособие отличается от известных книг по школьной геометрии как широтой охвата материала (это практически все разделы геометрии на плоскости (планиметрии)), так и полнотой и глубиной его изложения.

Тщательно отобранный и систематизированный теоретический материал, а также большое количество задач различного уровня сложности с решениями (значительное число задач в книге — это задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике в ведущих вузах Российской Федерации и Республики Беларусь) не только помогут учащимся углубить свои знания, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении планиметрии, но и предоставят хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к выпускным и вступительным экзаменам по математике в ее геометрической части — геометрии на плоскости.

Теперь о некоторых соглашениях. В пособии многие свойства геометрических фигур нумеруются с буквой X (например, свойство 1.4X). Это означает, что такие свойства являются характеристическими, т. е. кроме сформулированного утверждения, имеет место и утверждение, обратное приведенному. Обратные утверждения читателю полезно доказать самому (доказательства некоторых из них в пособии приводятся).

Определенное число задач нумеруется (кроме обычной нумерации) с символом ▼ (например, ▼1.8). Последнее означает, что каждая из таких задач либо дополняет тот или иной список свойств геометрических фигур, либо иллюстрирует часто встречающийся прием или метод решения, поэтому авторы рекомендуют читателям обратить на них особое внимание.

Еще одна группа задач — это задачи для самостоятельного решения. Они нумеруются в пособии с буквой С (например, 1.1С). Решения всех за-

дач данной группы приводятся в главе 9 (часть 2), к которой читатели могут обратиться в случае затруднений с решением или для контроля.

Что же касается рекомендаций по приобретению прочных навыков решения геометрических (и не только) задач, то, хотя это и не звучит оригинально, совет один: задач надо решать как можно больше. Начинать же их решение следует с выполнения хорошего чертежа, как можно более точно отражающего те или иные зависимости между параметрами (например, длинами, углами, площадями), фигурирующими в условиях задач.

Пособие предназначено учащимся и преподавателям средних школ и гимназий, лицеев и колледжей, а также абитуриентам.

Но, как надеются авторы, и студенты, и преподаватели педагогических специальностей высших учебных заведений также найдут в книге интересный материал, который они смогут использовать в своей работе.

Авторы благодарны рецензентам Л. И Лавриновичу и В. В. Шлыкову за конструктивные замечания и рекомендации по улучшению пособия, К. С. Филиповичу за творческие консультации, В. В. Крахотко за содержательные обсуждения.

ГЛАВА 1

ТРЕУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТИ

§ 1. УГЛЫ, ТРЕУГОЛЬНИКИ

Угол (линейный угол) — это геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки.

Вместо слова «угол» часто употребляют знак \sphericalangle .

*Точка, из которой выходят лучи, называется **вершиной** угла, а сами лучи — **сторонами** угла.*

*Два угла называются **смежными**, если у них общие вершина и одна сторона, а две другие стороны образуют прямую (на рис. 1.1 — это углы $\sphericalangle COB$ и $\sphericalangle BOA$).*

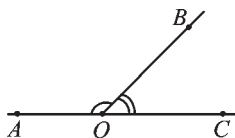


Рис. 1.1

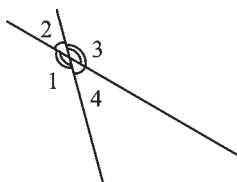


Рис. 1.2



Рис. 1.3

*Углы называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями за вершину сторон другого угла (рис. 1.2).*

*Угол, у которого стороны образуют прямую, называется **развернутым** (рис. 1.3).*

*Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным**.*

*Угол делит плоскость на две части, каждую из которых (в совокупности с самим углом) называют **плоским** углом.*

Учитывая, что всякий угол определяет два плоских угла, для обозначения того из них, о котором идет речь в тексте, часто (во избежание двусмысленности) на чертеже проводят от одной его стороны

до другой одну или несколько дужек (одну или несколько изогнутых стрелок) (рис. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4).

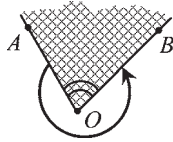


Рис. 1.4

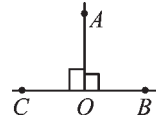


Рис. 1.5

Точка O и лучи OA , OB (рис. 1.4) называются соответственно **вершиной** и **сторонами** плоского угла, который, как и линейный угол, также обозначается через AOB .

Два угла считаются **равными**, если они могут быть совмещены так, что совпадут их вершины и стороны.

Если два плоских угла могут быть совмещены, то их также называют **равными**.

Для обозначения равенства углов (плоских углов) употребляют обычный знак равенства $=$. Запись $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ читается так: «Угол (плоский угол) ABC равен углу (плоскому углу) $A_1B_1C_1$ ».

Угол, равный своему смежному углу, называется **прямым**.

Прямые углы часто обозначают так или иначе расположенным знаком \perp (на рис. 1.5 прямыми являются углы AOB и AOC).

Далее, будем говорить, что плоский угол ABC **меньше** плоского угла KLM (плоский угол KLM **больше** плоского угла ABC), если первый из этих двух углов равен некоторому плоскому углу PLQ , целиком лежащему в плоском угле KLM и отличному от последнего (рис. 1.6).

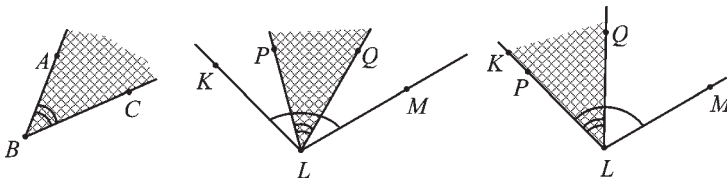


Рис. 1.6

Чтобы отметить, что один из плоских углов меньше (больше) другого, употребляют обычный знак $<$ ($>$). Запись $\angle ABC < \angle A_1B_1C_1$

Предметный указатель

А

- Абсолютная величина вектора 252
- Абсцисса вектора 264
- Аксиома 13
 - о параллельных прямых 14
 - о принадлежности точек и прямых 13
 - о расположении точек относительно прямой 14
 - о существовании равных треугольников в заданном расположении относительно данного луча 15
 - об откладывании отрезка 14
 - об откладывании угла 14
- Апофема правильного n -угольника 194

Б

- Барицентр 80
- Биссектриса
 - треугольника 103
 - — внешняя 103
 - угла 103

В

- Вектор 252
 - единичный 252
 - нулевой 252
- Векторы
 - коллинеарные 253

- ортогональные 266
- перпендикулярные 266
- противоположные 253
- равные 253
- сонаправленные 253
- Вершина
 - n -угольника 187
 - треугольника 12
 - угла 9
 - — плоского 11
- Вершины смежные n -угольника 195
- Высота
 - параллелограмма 149
 - трапеции 164
 - треугольника 85

Г

- Гипотенуза 13
- Градус 11

Д

- Диагональ n -угольника 188
- Диаметр окружности 59
- Длина
 - вектора 252
 - окружности 229
- Дуга окружности 59

З

- Задача
— о трилистнике 123
— Ферма 162

К

- Касательная к окружности 68
Катет 13
Квадрат 149
Координаты
— вектора 264
— точки 265
Коэффициенты разложения векто-
ра 263
Круг 59

М

- Медиана
— пятиугольника 85
— треугольника 77
Мера
— радианная 11
— угловая 11, 61
Модуль вектора 252
Многоугольник (n -угольник) 187
— вписанный в окружность 188
— выпуклый 188
— правильный 188
— невыпуклый 188
— описанный около окружности 188

О

- Окружность 59
— вневписанная треугольника 117
— вписанная в треугольник 117
— описанная около треугольника 117
— Эйлера 101
Ордината вектора 264

- Орг 252
Ортоцентр 87
— внешний 92
Основание
— трапеции 164
— треугольника 13
Ось 260
— абсцисс 264
— ординат 264
Отношение
— вектора к числу 258
—, в котором точка делит отрезок 259

П

- Параллелограмм 149
Площадь 217
— квадрата 209
— круга 231
— n -угольника 209
— треугольника 12
Полуплоскость 14
Правило
— замыкающей 254
— параллелограмма 254
— треугольника 254
Признак подобия прямоуголь-
ных треугольников
— по одному острому углу 37
— по пропорциональности гипотену-
зы и катета 37
— по пропорциональности двух
катетов 37
Признак подобия треугольников
— по двум сторонам и углу меж-
ду ними 36
— по двум углам 35
— по трем сторонам 36
Признак подобия четырехугольни-
ков 195
Признак равенства прямоуголь-
ных треугольников

— по гипотенузе и катету 34
 — по гипотенузе и острому углу 34
 — по двум катетам 33
 — по катету и острому углу 34
 Признак равенства треугольников
 — по двум сторонам и углу между ними 31
 — по стороне и прилежащим к ней углам 32
 — по трем сторонам 33
 Проекция вектора на ось
 — алгебраическая 260
 — геометрическая 260
 Произведение
 — ненулевого вектора на число 256
 — скалярное двух векторов 266
 Прямая Эйлера 101
 Прямоугольная система координат 264
 Прямоугольник 149
 Прямые
 — параллельные 14
 — перпендикулярные 17

Р

Радииан 11
 — дуговой 11
 — угловой 11
 Радиус-вектор точки 265
 Радиус окружности 59
 Разложение вектора по векторам 263
 Разность векторов 255
 Ромб 149

С

Сегмент 232
 Сектор 231
 Секущая окружности 59
 Скалярный квадрат вектора 267
 Средняя линия
 — трапеции 164

— треугольника 12
 Стороны
 — n -угольника 187
 — противоположащие четырехугольника 195
 — противоположащие шестиугольника 201
 — смежные n -угольника 188
 — соответствующие треугольника 12
 — сходственные треугольника 13
 — треугольника 12
 — угла 9
 — — плоского 10
 Стороны боковые
 — трапеции 164
 — треугольника 13
 Сумма векторов
 — \vec{a} и \vec{b} 254
 — нескольких 255

Т

Теорема
 — косинусов 137
 — — для четырехугольников 197
 — Менелая 20
 — — обратная 31
 — Пифагора 52
 — — обобщенная 52
 — Птолемея 178
 — синусов 126
 — — расширенная 126
 — Фалеса 45
 — — обобщенная 45
 — Чевы 20
 — — обратная 31
 Трапеция 164
 — прямоугольная 164
 — равнобедренная 164
 — равнобокая 164
 — равнобочная 164
 Треугольник 12

- ортоцентральный 91
- остроугольный 13
- прямоугольный 13
- равнобедренный 13
- равносторонний 13
- разносторонний 13
- тупоугольный 13

Треугольники

- подобные 35
- равные 13

У

Углы

- вертикальные 9
- внешние накрест лежащие 12
- внешние односторонние 12
- внутренние накрест лежащие 12
- внутренние односторонние 12
- равные 10
- — плоские 10
- смежные 9
- соответственные 12
- соответствующие 12

Угол 9

- внешний выпуклого n -угольника 188
- внешний треугольника 12
- внутренний n -угольника 188
- вписанный 59
- между двумя ненулевыми векторами 266
- —, имеющими общее начало 266
- плоский 9
- — больший 10
- — меньший 10
- — нулевой 11
- — острый 11

- — полный 11
- — прямой 11
- — тупой 11
- прямой 10
- развернутый 9
- треугольника 12
- центральный 9

Ф

Формула

- Герона 215
- Птолемея 219
- Эйлера 125

Х

Хорда окружности 59

Ц

Центр

- вневписанной окружности треугольника 118
 - вписанной в треугольник окружности 117
 - окружности 59
 - описанной около треугольника окружности 117
 - правильного n -угольника 193
- Центроид 80

Ч

Четырехугольник

- вписанный в окружность 177
 - выпуклый 188
 - невыпуклый 188
 - описанный около окружности 177
- Число π 229

Литература

1. *Болтянский, В. Г.* Преобразования. Векторы / В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. М. : Просвещение, 1964. 304 с.
2. *Ваховский, Е. Б.* Задачи по элементарной математике / Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. М. : Наука, 1971. 360 с.
3. *Готман, Э. Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения / Э. Г. Готман. М. : Просвещение : АО «Учеб. лит.», 1996. 240 с.
4. *Жук, И. К.* Решения экзаменационных задач по математике за курс базовой школы. В 3 ч. Ч. 3 / И. К. Жук, С. К. Жук. Мн. : Жасскон, 2001. 340 с.
5. Задачи по элементарной математике / В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин. М. : Наука, 1969. 416 с.
6. *Кузьмин, Ю. Н.* Математика / Ю. Н. Кузьмин. СПб. : Спец. литература, 1995. 128 с.
7. *Кушнир, И. А.* Векторные методы решения задач / И. А. Кушнир. Киев : Обериг, 1994. 207 с.
8. *Куценко, В. С.* Сборник конкурсных задач по математике с решениями / В. С. Куценко. Л. : Судпромгиз, 1960. 374 с.
9. *Лурье, М. В.* Пособие по геометрии / М. В. Лурье, Б. И. Александров. М. : Изд-во МГУ, 1984. 256 с.
10. *Прасолов, В. В.* Задачи по планиметрии. В 2 ч. Ч. 1 / В. В. Прасолов. М.: Наука, 1986. 272 с.
11. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы / П. Т. Дыбов, А. И. Забоев, А. С. Иванов и др. ; под ред. А. И. Прилепко. М. : Высш. шк., 1989. 271 с.
12. Сборник конкурсных задач по математике / В. М. Говоров, П. Т. Дыбов, Н. В. Мирошин, С. Ф. Смирнова ; под ред. А. И. Прилепко. М. : Наука, 1983. 384 с.

13. *Ткачук, В. В.* Математика — абитуриенту / В. В. Ткачук. 5-е изд., испр. и доп. М. : МЦНМО, 1998. 864 с.

14. *Цырульникова, М. Г.* Конкурсные задачи по геометрии с решениями из сборника под редакцией М. И. Сканава / М. Г. Цырульникова, Х. А. Ильягуев, В. Ф. Антонов. М. : БАО-Пресс, 1999. 656 с.

15. *Шарыгин, И. Ф.* Геометрия. 9—11 кл.: От учебной задачи к творческой / И. Ф. Шарыгин. М. : Дрофа, 1997. 400 с.

16. *Шарыгин, И. Ф.* Избранные задачи по геометрии конкурсных экзаменов в ВУЗы (1987—1990) / И. Ф. Шарыгин. Львов : «Квантор», 1991. 97 с.

17. *Шахно, К. У.* Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности / К. У. Шахно. 4-е изд., стереотип. Мн. : Выш.шк., 1967. 478 с.

18. *Шлыков В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Шлыков. 2-е изд. Мн. : Асар, 2000. 288 с.